

# Formulaire RdM

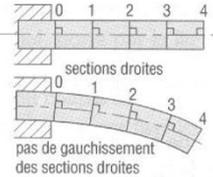
## Généralités

### Hypothèses de la RdM

**Matériau homogène** : structure continue et identique dans toutes les directions; cette hypothèse est fautive pour tous les matériaux granuleux ou fibreux (béton, pierre, bois, composites,...).

**Matériau isotrope** : Mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions. Cette hypothèse est fautive pour tous les matériaux granuleux ou fibreux.

**Géométrie** : 1 dimension >> devant les 2 autres, rayon de courbure >> dimensions de la section droite, pas de variation brusque de section droite.

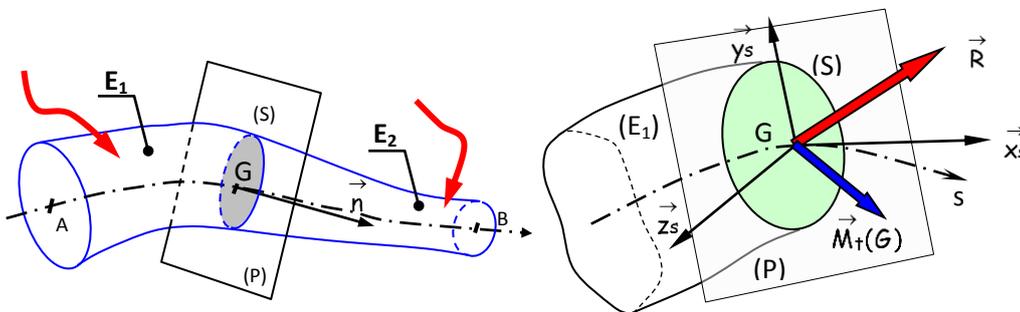


**Navier & Bernoulli** : Les sections planes normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après déformation.

**Barré de St Venan** : Les résultats obtenus par la RdM ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des efforts concentrés.

### Torseur de cohésion : représente les efforts intérieurs dans une section (S) de la poutre

Dans une section droite (S) d'abscisse s, les éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs  $\{T_{coh}\} = \{T_{E2 \rightarrow E1}\}$  s'expriment en G, centre d'inertie de la section, en projection dans la base locale  $Bs = (G, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ . C'est la forme générale du torseur des efforts intérieurs ou de cohésion.



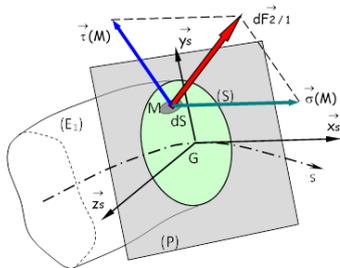
$$\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$$

N : effort Normal  
 $T_i$  : efforts tranchants  
 $M_t$  : moment de torsion  
 $M_{fi}$  : moments fléchissant

$\{T_{coh}\}$  = - la somme des torseurs des efforts situés avant la coupure, exprimée au centre d'inertie de la section droite de coupure.  
 = + la somme des torseurs des efforts situés après la coupure, exprimée au centre d'inertie de la section droite de coupure.

### Contraintes exercées

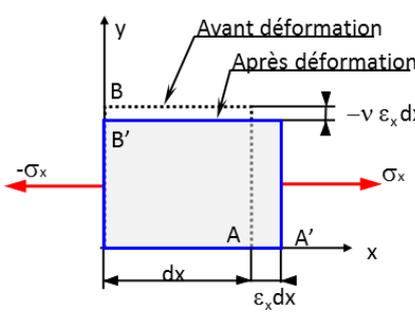
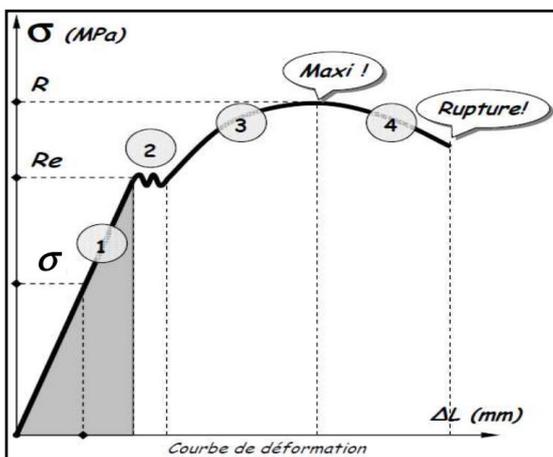
Deux types de contraintes peuvent exister dans une section selon la sollicitation de la poutre : tangentielle ( $\tau$ ) et/ou normale ( $\sigma$ ).



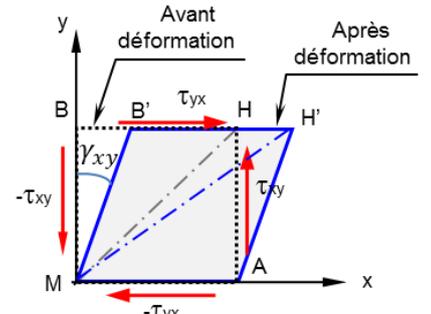
On note  $\vec{C}(M, \vec{x}_s)$  la contrainte exercée en M :  $\vec{C}(M, \vec{x}_s) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}_{2/1}}{dS}$  avec  $dS \rightarrow 0$

En projetant  $\vec{C}(M, \vec{x}_s)$  sur  $\vec{x}_s$  et dans la section droite :  $\vec{C}(M, \vec{x}_s) = \sigma(M) \vec{x}_s + \vec{\tau}(M)$

Les caractéristiques des matériaux (E,  $\nu$ ,  $R_e$ ,  $R_m$ ,  $R_r$ , etc.) sont souvent obtenus à l'aide d'essais dans un laboratoire sur des éprouvettes soumises à des efforts de traction. On retrouve généralement la courbe caractéristique suivante :



Coefficient de Poisson :  $\nu$   
 $\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \cdot \epsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$



Distorsion :  $\gamma_{xy}$     Module de Coulomb : G  
 $\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$      $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Zone (1) : élastique ; zone (2) : striction ; zone (3) : déformation plastique ; zone (4) : zone de rupture

### Sollicitation de Traction / Compression pure

Type de contraintes	Forme du torseur de cohésion	Relations contraintes / efforts intérieurs	Relations contraintes / déformations	Relations effort / déplacements	Remarques
Normales	$\begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{Bs}$	$\sigma = \frac{N}{S}$	$\sigma = E * \epsilon$	$\Delta l = \frac{N * L}{E * S}$	N > 0 : traction N < 0 : compression

### Sollicitation de Cisaillement pur

Type de contraintes	Forme du torseur de cohésion	Relations Contraintes / efforts intérieurs	Relations contraintes / déformations	Remarques
Tangentielles	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Ty & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{Bs}$	$\tau_{moy} = \frac{N}{S}$	$\tau = G * \gamma$	Ce peut être Tz et non Ty $\tau_{max} = \frac{3}{2} \tau_{moy}$ si section rectangulaire $\tau_{max} = \frac{4}{3} \tau_{moy}$ si section circulaire

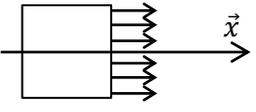
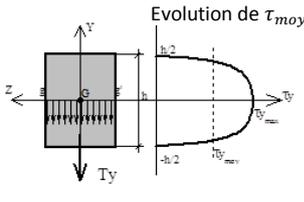
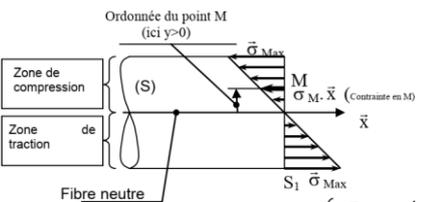
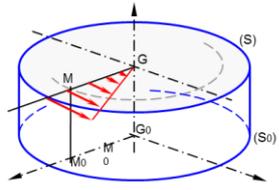
### Sollicitation de Flexion pure

Type de contraintes	Forme du torseur de cohésion	Relations Contraintes / efforts intérieurs	Relations effort / déplacements	Remarques
Normales	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Ty & 0 \\ 0 & Mfz \end{Bmatrix}_{Bs}$	$\sigma = -\frac{Mfz(x)}{I_{Gz}} * y$	$E * I_{Gz} y''(x) = Mfz(x)$	$Ty = -\frac{dMfz}{dx}$ $I_{Gz}$ : moment quadratique

### Sollicitation de Torsion pure

Type de contraintes	Forme du torseur de cohésion	Relations Contraintes / efforts intérieurs	Relations effort / déplacements	Remarques
Tangentielles	$\begin{Bmatrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{Bs}$	$\tau = \frac{Mt}{I_{G0}} * \rho$	$M_t = G * \theta * I_{G0}$ $\theta = \frac{d\alpha}{dx}$ $\gamma_{zx} = \rho \frac{d\alpha}{dx} = \rho \frac{Mt}{GI_{G0}}$	$I_{G0}$ : moment quadratique polaire [mm <sup>4</sup> ] $\theta$ : angle de rotation unitaire [rad/mm] $\alpha$ : angle de rotation [rad]

### Répartition des contraintes dans une poutre

Traction pure	Cisaillement pur	Flexion pure	Torsion pure
			

Condition de résistance :

$$\sigma_{max} \leq \frac{R_e}{s} = R_{pe} \quad \text{ou} \quad \tau_{max} \leq \frac{\tau_e}{s} = R_{pg}$$

Avec :

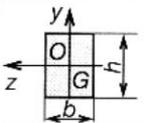
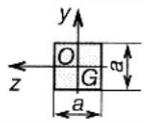
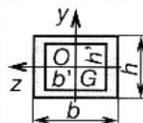
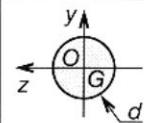
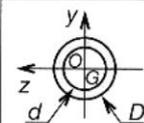
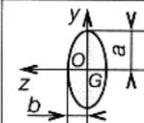
$R_e$  : limite élastique à la traction du matériau

$\tau_e$  : limite élastique au cisaillement du matériau

$s$  : coefficient de sécurité

$R_{pe}$  : résistance pratique à l'élasticité

$R_{pg}$  : résistance pratique au glissement

Sections (S)						
$I_{Gy}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{hb^3 - b'h^3}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$	$0,784 ab^3$
$I_{Gz}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{bh^3 - b'h^3}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$	$0,784 a^3 b$
$I_0 = I_G$	$\frac{bh}{12} (b^2 + h^2)$	$\frac{a^4}{6}$	$I_{Gy} + I_{Gz}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2)$